Exercice: 1.

1. *Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*
   Montrer que $f \mapsto f'(a)$ est une forme linéaire sur E.
2. *Soient F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $g \in F$.*
   Montrer que $f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

Correction exercice 1.

1) *Soient f_1, f_2 deux éléments de E et $\alpha \in \mathbb{R}$.*
   On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \varphi(P) = f'(a). \end{array}$$

$$\varphi(\alpha f_1 + f_2) = (\alpha f_1 + f_2)'(a) = \alpha f_1'(a) + f_2'(a) = \alpha\varphi(f_1) + \varphi(f_2).$$

2) *Soient f_1, f_2 et g des éléments de F et $\alpha \in \mathbb{R}$.*
   On pose

$$\begin{array}{rccl} \phi : & F & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha f_1 + f_2) &= \int_0^1 (\alpha f_1 + f_2)(t)g(t)dt = \int_0^1 (\alpha f_1(t)g(t) + f_2(t)g(t))dt \\ &= \alpha \int_0^1 f_1(t)g(t)dt + \int_0^1 f_2(t)g(t)dt = \alpha\phi(f_1) + \phi(f_2). \end{aligned}$$

Exercice: 2.

Soient n un entier ≥ 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré$\leq n$ et φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt. \end{array}$$

1. *Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, déterminer sa dimension.*
2. *Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.*
3. *Pour chaque $i \in 0, 1, ..., n$, soit l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \varphi_i(P) = P\left(\dfrac{i}{n}\right). \end{array}$$

   Montrer que $\forall i \in 0, 1, ..., n$, φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

4. *En déduire qu'il existe des scalaires* $a_0, a_1, ..., a_n$ *tels que* $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} a_i P\left(\frac{i}{n}\right)$.

Correction exercice 2.

1) $\mathbb{R}_n[X] = \{P, \ /P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n\}$ *est un espace vectoriel (facile à vérifier) de base* $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$ *et de dimension* $n+1$.
2) *On montre que* $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ *pour tous* $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) *Pour chaque* $i, \ 1 \leq i \leq n$ *l'application* φ_i *est linéaire (à vérifier)*
   Montrons que $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ *est une base de* $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
   Soient $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ *dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n = 0$.
   On a $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n = 0 \Rightarrow (\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n)(P) = 0$.
   $\Rightarrow \alpha_0\varphi_0(P) + \alpha_1\varphi_1(P) + ... + \alpha_n\varphi_n(P) = 0 \Rightarrow \alpha_0P(0) + \alpha_1P(\frac{1}{n}) + ... + \alpha_nP(1) = 0$.
   Prenons $P = (X - \frac{1}{n})(X - \frac{1}{n})...(X - \frac{n-1}{n})(X - 1)$.
   $deg(P) = n$ *et* $P(\frac{1}{n}) = P(\frac{2}{n}) = ... = P(1) = 0$, $P(0) \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$.
   Si on prend $P(x) = X(X - \frac{1}{n})(X - \frac{3}{n})...(X - 1)$, *on trouve* $\alpha_1 = 0$.
   Conclusion $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ *forment une base de* $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
4) *On a* $\varphi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + ... + a_n\varphi_n$.
   $\forall P, \ \varphi(P) = a_0\varphi_0(P) + a_1\varphi_1(P) + ... + a_n\varphi_n(P)$.
   $\int_0^1 P(t)dt = \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(P) = \sum_{i=0}^{n} a_iP(\frac{i}{n}) = a_0P(0) + a_1P(1) + ... + a_nP(n)$.

Exercice: 3.

Soient $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$.
Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ *à* $\mathcal{B}_2^*$.

Correction exercice 3.

Soit $u : E \to E$ *application linéaire et* ${}^tu : E^* \to E^*, \ \varphi \mapsto^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ *transposé de* u.
Soient $\beta_1 = (e_1, e_2, ..., e_n)$, $\beta_2 = (f_1, f_2, ..., f_n)$ *deux bases de* E *et* $\beta_1^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ *et* $\beta_2^* = (f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*)$ *les bases duales de* β_1 *et* β_2.
Soient $A = Mat(u, \beta_1)$ *et* $B = Mat(u, \beta_2) = P^{-1}AP$ *avec* $P = Pass(\beta_1 \to \beta_2)$.
On a ${}^tB = Mat({}^tu, \beta_2^*)$.
${}^tB =^t (P^{-1}AP) =^t (AP)^t(P^{-1}) =^t P^tA^t(P^{-1}) \Rightarrow Mat({}^tu, \beta_1^* \to \beta_1^*) =^t (P^{-1})$.

Exercice: 4.

1. *On considère l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$
   Montrer dans chaque cas que les vecteurs e_1, e_2 *et* e_3 *forment une base de* E *et calculer leur base duale.*
   a) $e_1 = (1; 0; -1)$, $e_2 = (-1; -1; 2)$, $e_3 = (-2; 1; -2)$.
   b) $e_1 = (1; 0; 0)$, $e_2 = (1; 1; 0)$, $e_3 = (0; 1; 1)$.
   c) $e_1 = (1; 1; 0)$, $e_2 = (0; 1; 1)$, $e_3 = (1; 1; 1)$.
2. *Dans chaque cas, montrer que les formes linéaires* f_1, f_2 *et* f_3 *forment une base de* E^* *puis calculer leur base préduale.*
   a) $f_1 = (1; 1; -1)$, $f_2 = (1; -1; 1)$, $f_3 = (1; 1; 1)$.
   b) $f_1 = (1; 2; 3)$, $f_2 = (2; 3; 4)$, $f_3 = (3; 4; 6)$.
   c) $f_1 = (0; 1; 1)$, $f_2 = (1; 0; 1)$, $f_3 = (1; 1; 0)$.

Correction exercice 4.

1) *Les bases duales :*

a) $e_1^* = (0,-2,-1)$, $e_2^* = (\frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-1}{3})$ et $e_3^* = (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$.

b) $e_1^* = (1,-1,1)$, $e_2^* = (0,1,-1)$ et $e_3^* = (0,0,1)$.

c) $e_1^* = (0,1,-1)$, $e_2^* = (-1,1,0)$ et $e_3^* = (1,-1,1)$.

2 Les bases préduales :

a) $f_1^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2})$, $f_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$ et $f_3^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) $f_1^* = (-2,0,1)$, $f_2^* = (0,3,-2)$ et $f_3^* = (1,-2,1)$.

c) $f_1^* = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ et $f_3^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$.

Exercice: 5.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes des degrés ≤ 3 à coefficients réels.
On considère les formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

$$\forall P \in E, \;\; f_1(P) = P(0), \;\; f_2(P) = P(1), \;\; f_3(P) = P'(0), \;\; et \;\; f_4(P) = P'(1).$$

1. *Montrer que $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E^*.*
2. *Déterminer la base $\mathcal{B}$ de E préduale de $\mathcal{B}^*$.*
3. *Soit f la forme linéaire sur E définie par :*

$$\forall P \in E, \;\; f(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

Déterminer les composantes de f dans la base $\mathcal{B}^*$.

Correction exercice 5.

1) Montrerons que $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E^*.
On a $dim(\mathcal{B}^*) = (f_1, f_2, f_3, f_4) = 4 = dim(E)$.
Donc il suffit de montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i f_i = 0$, a-t-on $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, ..., 4$.
On a $\forall P \in E, \; \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \alpha_3 f_3(P) + \alpha_4 f_4(P) = 0$.
Pour $P(x) = X^1(X-1)$, $P'(x) = 3X^2 - 2X$, on a $P(0) = P(1) = P'(0) = 0$ et $P'(1) = 1 \Rightarrow \alpha_4 = 0$.
Pour $P(x) = X(X-1)^2$, $P'(x) = 3X^2 - 4X + 1$, on a $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$.
Pour $P(x) = \dfrac{1}{3}X^3 - \dfrac{1}{2}$, $P'(x) = X^2 - X$, on a $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ et $P'(1) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \alpha_2 = 0$.
Pour $P(x) = \dfrac{1}{3}X^3\dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{6}$, $P'(x) = X^2 - X$, on a $P(1) = P'(0) = P'(1) = 0$ et $P(0) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \alpha_1 = 0$.
D'où $\mathcal{B}^*$ est une base de E.

2) Déterminons la base $\mathcal{B}$ de E préduale de $\mathcal{B}^*$.
Soit (P_1, P_2, P_3, P_4) une base de E. On a, $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$, donc $\forall i, j, \; f_i(P_j) = \delta^{ij}$.
On a

$$\begin{cases} f_1(P_1) = 1 \Rightarrow P_1(0) = 1, \\ f_2(P_1) = 0 \Rightarrow P_1(1) = 0, \\ f_3(P_1) = 0 \Rightarrow P_1'(0) = 0, \\ f_4(P_1) = 0 \Rightarrow P_1'(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow 1 \text{ est une racine deouble de } P_1 \Rightarrow P_1 = (2X+1)(X-1)^2.$$

$$\begin{cases} f_1(P_2)=0 \Rightarrow P_2(0)=0, \\ f_2(P_2)=1 \Rightarrow P_2(1)=1, \\ f_3(P_2)=0 \Rightarrow P_2'(0)=0, \\ f_4(P_2)=0 \Rightarrow P_2'(0)=0, \end{cases} \Rightarrow 0 \textit{ est une racine double de } P_2 \Rightarrow P_1=(-2X+3)(X)^2.$$

$$\begin{cases} f_1(P_3)=0 \Rightarrow P_3(0)=0, \\ f_2(P_3)=0 \Rightarrow P_3(1)=0, \\ f_3(P_3)=1 \Rightarrow P_3'(0)=1, \\ f_4(P_3)=0 \Rightarrow P_3'(0)=0, \end{cases} \Rightarrow 1 \textit{ est une racine deouble de } P_3 \Rightarrow P_3=X(X-1)^2.$$

$$\begin{cases} f_1(P_4)=0 \Rightarrow P_4(0)=0, \\ f_2(P_4)=0 \Rightarrow P_4(1)=0, \\ f_3(P_4)=0 \Rightarrow P_4'(0)=0, \\ f_4(P_4)=1 \Rightarrow P_4'(0)=0, \end{cases} \Rightarrow 0 \textit{ est une racine deouble de } P_4 \Rightarrow P_4=X^2(X-1).$$

D'où la base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^*(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

3) *Déterminons les composantes de f dans la base $\mathcal{B}^*$.*
Soient α_1, α_2, α_3 et α_4 les composantes de f dans $\mathcal{B}^*$.
Donc $f=\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3+\alpha_4 f_4 \Rightarrow \alpha_1 f_1(P_1)+\alpha_2 f_2(P_1)+\alpha_3 f_3(P_1)+\alpha_4 f_4(P_1)=\alpha_1 f_1(P_1)=\alpha_1$.
$\Rightarrow \alpha_1 = f(P_1)=\int_0^1 P_1(t)dt=\dfrac{1}{2}$.
De même, on trouve $\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, $\alpha_3=\dfrac{1}{12}$ et $\alpha_4=\dfrac{-1}{12}$.
D'où $f=\dfrac{1}{2}f_1+\dfrac{1}{2}f_2+\dfrac{1}{12}f_3-\dfrac{1}{12}f_4$.

Exercice: 6.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $E=\mathbb{K}[X]$.
Montrer que pour toute forme linéaire φ de E, il existe un unique élément $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi\left(\sum_{i=0}^{p} a_i X^i\right)=\sum_{i=0}^{p} a_i x_i$.

Correction exercice 6.

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P=\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, alors $\varphi(P)=\sum_{i=0}^{p} a_i\varphi(X^i)$.
On pose $\varphi(X^i)=x_i$, $\forall i\in\mathbb{N}$.
Donc il existe une suite $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall P=\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, $\varphi(P)=\sum_{i=0}^{p} a_i x_i$. x est unique par construction.

Exercice: 7.

Soit $E=\mathbb{R}^n$, pour $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E$, on pose $f_i(x)=x_i+x_{i+1}$ pour $i=1,...,n-1$ et $f_n(x)=x_n+x_1$.

1. *Montrer que $(f_i)_{1\le i\le n}$ est famille des formes linéaires sur E.*
2. *A quelle condition la famille $(f_i)_{1\le i\le n}$ est une base de E^*.*

Correction exercice 7.

1) *Soient $(f_i)_{1\le i\le n}$ est une famille de formes linéaires , $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)$ dans E et $\lambda\in\mathbb{R}$.*
Pour i, $1\le i<n$, on a $f_i(\lambda x+y)=\lambda f_i(x)+f_i(y)$ et $f_n(\lambda x+y)=\lambda f_n(x)+f_n(y)$.

2) *On a E est de dimension finie, il suffit de montrer que c'est une famille libre.*
Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ *tels que* $\sum \liminf_i f_i(x) = 0$.
La dernière équation vraie en particulier pour $x = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, *on peut faire bouger la position de* 1, *ce qui donne la système suivant*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{n-1} + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Donc } \lambda_1 = -\lambda_n \textit{ et } \lambda_1 = -\lambda_2 = ... = (-1)^{n-1}\lambda_n.$$

Lorsque n est impaire $\lambda_i = 0$, $\forall i$, *sinon on peut toujours trouver des solutions non nulles au système.*

<u>Exercice:</u> 8 (Facultatif)**.**
Soient $V = \mathbb{R}_n[X]$ *l'espace des polynômes de degré* $\leq n$ *et* $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ *une base de* V.
Soit ∂ *l'endomorphisme de* V *qui à tout* $P \in V$ *associé son polynôme dérivé* P.
On pose $\partial^i = \partial \circ ... \circ \partial$ *(i facteur) pour* $i \in \mathbb{N}^*$ *et* $\partial^0 = id_V$. *On fixe* $n = 4$.

1. *Pour* $i = 0, ..., n$, *on considère la forme linéaire* ϕ $V \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \dfrac{(\partial^i P)(0)}{i!}$. *Montrer que* $(\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n)$ *est la base duale* $\mathcal{B}^*$ *de la base* $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ *de* V.
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$, *écrire la matrice* A_λ *exprimant la famille de vecteurs* $\mathcal{C}_\lambda = \big(1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, ..., (X-\lambda)^n\big)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *et montrer que* $\mathcal{C}_\lambda$ *est une base de* V.
3. *Soit* u_λ *l'endomorphisme de* V *tel que* $Mat_{\mathcal{B}}(u_\lambda) = A_\lambda$, *si* $\mu \in \mathbb{R}$, *pouvez-vous déterminer sans calcul la matrice de* $u_\mu \circ u_\lambda$ *puis celle de* u_λ^{-1} *sinon calculer* A_λ^{-1}.
4. *Soit* $\mathcal{C}_\lambda^*$ *la base duale de* $\mathcal{C}_\lambda$. *Écrire la matrice de passage* $Mat_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*)$.

<u>Exercice:</u> 9 (Facultatif)**.**
Soient $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ *et* $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *distincts.*
On note

$$\begin{cases} \varphi_i \ : \ E \to \mathbb{R} \\ \quad\; P \mapsto \ P(x_i) \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \begin{cases} \psi_i \ : \ E \to \mathbb{R} \\ \quad\; P \mapsto P'(x_i) \end{cases}$$

1. *Montrer que* $(\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi_1, ..., \psi_n)$ *est une base de* E^*.
2. *Chercher la base duale, on notera*

$$P_i = \prod_{i\neq j}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \ \textit{ et } \ d_i = P_i'(x_i).$$